٢- أمثلة عن فضاءات ليست فضاء هيلبرت :

١) الفضاء ℓ_p ليس فضاء جداء داخلي عندما يكون $p \neq 2$ وبالتالي فإنّ ℓ_p ليس فضاء هيلبرت .

إنّ هذه الدعوى تعني أنّ النظيم على ℓ_p عندما يكون $p \neq 2$، لا يمكن أن يولّد من جداء داخلي ، سنبرهن على هذا الأمر بإثبات أن النظيم لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع .

في الحقيقة إذا كان $x = (1,1,0,0,.......) \in \ell_p$ و $y = (-1,1,0,0,.......) \in \ell_p$ فإنّ:

$$\|x + y\| = \|x - y\| = 2 , \|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$$

أي أن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة. بذلك فإنّ ℓ_p هو فضاء باناخ دون أن يكون فضاء هيلبرت .

٢) الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنّه ليس فضاء هيلبرت .

سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t) = 1$ و $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$ فإنّنا نجد أنّ : $\|x\| = 1$ و $\|y\| = 1$ وأنّ:

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أنّ $\|x + y\| = 2$ و $\|x - y\| = 1$ وأنّ $2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4$

في حين أنّ : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5$

بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

٣- التعامد في فضاءات هيلبرت :

تعريف (٣) :

نقول إن العنصر $x \neq \theta$ في فضاء جداء داخلي H أنه متعامد مع العنصر $y \neq \theta$

ونقول أيضاً إن العنصرين x,y متعامدان ونكتب $x \perp y$، إذا كان $\langle x,y\rangle = 0$، من H فإننا نقول إن x. وبصورة مماثلة إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين من H فإننا نقول إن x يتعامد مع A ونكتب $x \perp A$ إذا كان $x \perp a$ أياً كان a من A، كما نقول إن المجموعتين A,B متعامدتان ونكتب $A \perp B$ إذا كان $a \perp b$ أياً كان a من A و b من B.

٤ – المتممة المعامدة لمجموعة :

ليكن H فضاء هيلبرت و H_1 مجموعة جزئية منه ندعو مجموعة كل العناصر من H المعامدة لـ H_1 بالمتممة المعامدة لـ H_1 ونرمز لها بالرمز $H_1^{\perp}$. أي أن :

$$H_1^{\perp} = \{x \in H : x \perp H_1\} = \{x \in H : \langle x,y\rangle = 0 ;\ \forall y \in H_1\}$$

إن $H_1^{\perp}$ هو فضاء جزئي من الفضاء H (يترك الإثبات للطالب).

مبرهنة (٤) :

لتكن M مجموعة محدبة ومغلقة من فضاء هيلبرت. يوجد عنصر ذو نظيم أصغري في M.

الإثبات :

لو كان $\theta \in M$ فإن $\|\theta\| = 0$ وهو العنصر ذو النظيم الأصغري .

لنفرض الآن أن $\theta \notin M$ وأن $0 < d = \inf\limits_{x \in M} \|x\|$ ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر M بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$ عندئذ بحسب مساواة متوازي الأضلاع لدينا:

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\right)$$

وهنا لدينا $2\left(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 4d^2$ وبما أن:

$\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in M$ (لأن M محدبة)، لهذا فإن:

$$\|x_n + x_m\|^2 = 4\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right\|^2 \geq 4d^2$$

ومنه يكون :

$$\|x_n - x_m\|^2 < 4d^2 - \|x_n + x_m\|^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\|x_n - x_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

أي أن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في M ولما كانت M مجموعة مغلقة وبالتالي يوجد عنصر $x \in M$ بحيث يكون $\|x\| = d$ وبذلك نكون قد حصلنا على العنصر x ذي النظيم الأصغري.

إثبات الوحدانية :

لنفرض وجود عنصر y بحيث $\|y\| = d$ ولدينا $\|x\| = d$ أي أن y عنصر ذو نظيم أصغري آخر . ولكن :

$$\|x + y\| = 2\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| \geq 2d = \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = 2d \Rightarrow$$

من هاتين المتراجحتين يكون:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| = 2d \qquad (*)$$

لكن ومن العلاقات :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

ينتج أنه لتحقق $(*)$ يجب أن يكون $x = \alpha y$ لنضمن تحقق المساواة في متراجحة شفارتز حيث α عدد مناسب لذلك فإن :

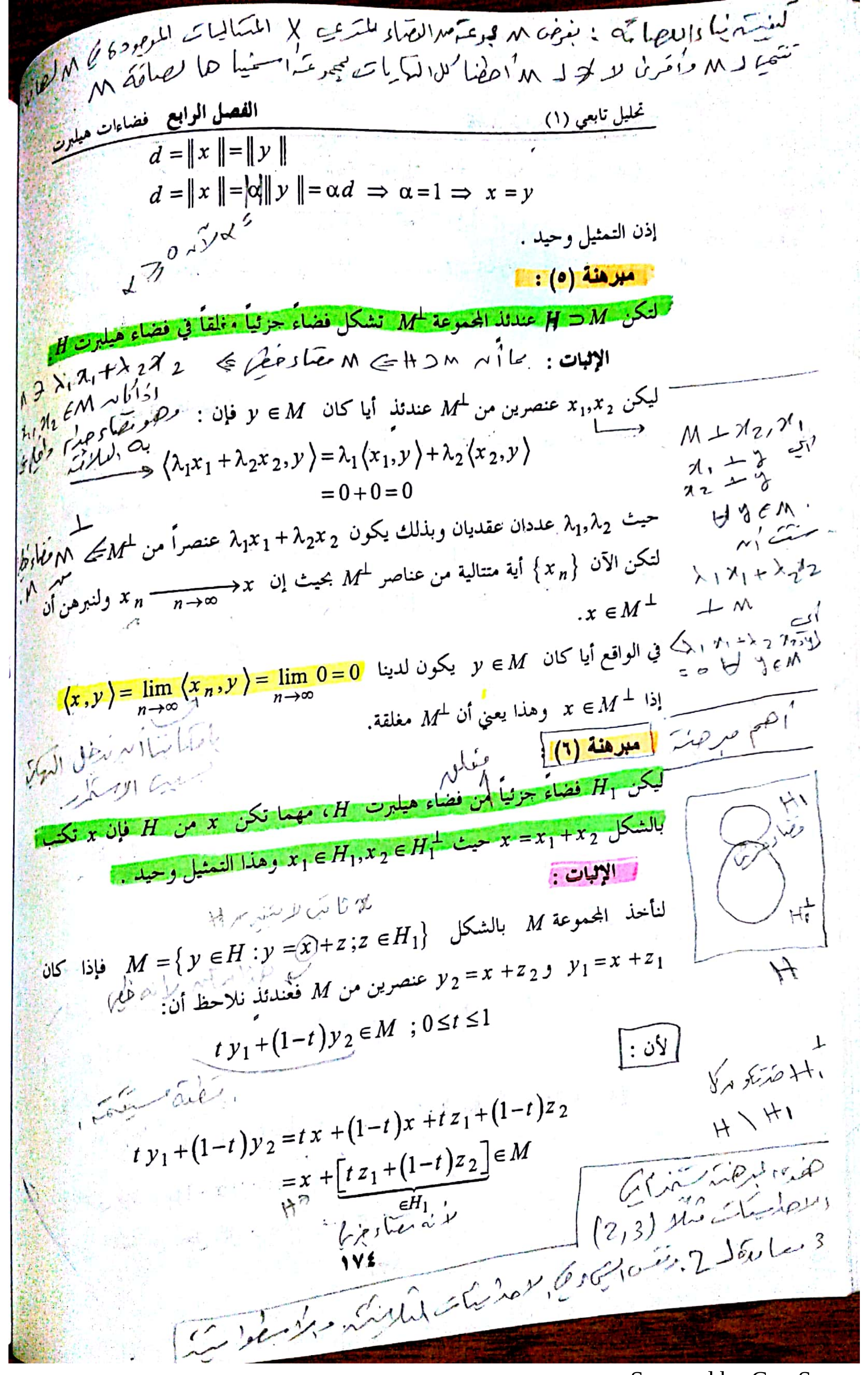
$$\|x + y\| = \|(\alpha + 1)y\| = |(\alpha + 1)|.\|y\| = |(\alpha + 1)|.d$$

ولكن :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| = |\alpha|.\|y\| + \|y\| = (|\alpha| + 1).\|y\|$$

وبالتالي فإن : $(|\alpha| + |1|) = |(\alpha + 1)|$

وهي محققة من أجل كل $\alpha \geq 0$ وهذا أصبح لدينا :



$$d = \| x \| = \| y \|$$

$$d = \| x \| = |\alpha| \| y \| = \alpha d \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow x = y$$

إذن التمثيل وحيد .

مبرهنة (٥) :

لتكن $M \subset H$ عندئذ المجموعة $M^{\perp}$ تشكل فضاءً جزئياً مغلقاً في فضاء هيلبرت H

الإثبات :

ليكن x_1, x_2 عنصرين من $M^{\perp}$ عندئذ أياً كان $y \in M$ فإن :

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y \rangle = \lambda_1 \langle x_1 , y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 , y \rangle$$
$$= 0 + 0 = 0$$

حيث λ_1, λ_2 عددان عقديان وبذلك يكون $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ عنصراً من $M^{\perp}$

لتكن الآن $\{x_n\}$ أية متتالية من عناصر $M^{\perp}$ بحيث إن $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ ولنبرهن أن $x \in M^{\perp}$.

في الواقع أياً كان $y \in M$ يكون لدينا $\langle x , y \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \langle x_n , y \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$

إذا $x \in M^{\perp}$ وهذا يعني أن $M^{\perp}$ مغلقة.

مبرهنة (٦)

ليكن H_1 فضاءً جزئياً من فضاء هيلبرت H، مهما تكن x من H فإن x تكتب بالشكل $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in H_1 , x_2 \in H_1^{\perp}$ وهذا التمثيل وحيد .

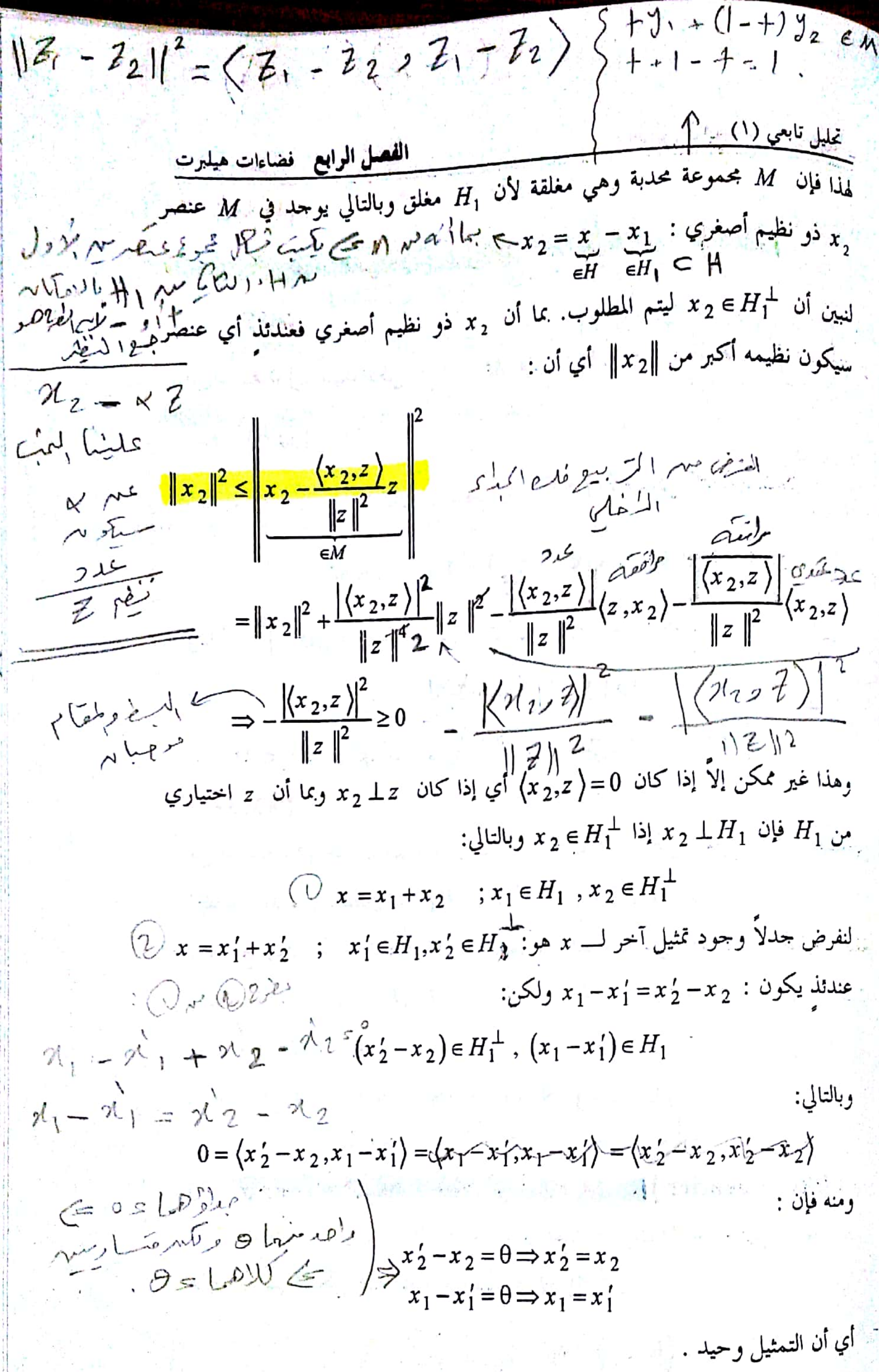
الإثبات :

لنأخذ المجموعة M بالشكل $M = \{ y \in H : y = x + z ; z \in H_1 \}$ فإذا كان $y_1 = x + z_1$ و $y_2 = x + z_2$ عنصرين من M فعندئذ نلاحظ أن:

$$t y_1 + (1-t) y_2 \in M \quad ; 0 \le t \le 1$$

لأن :

$$t y_1 + (1-t) y_2 = t x + (1-t) x + t z_1 + (1-t) z_2$$
$$= x + \underbrace{\left[t z_1 + (1-t) z_2 \right]}_{\in H_1} \in M$$



هذا فإن M مجموعة محدبة وهي مغلقة لأن H_1 مغلق وبالتالي يوجد في M عنصر x_2 ذو نظيم أصغري : $x_2 = \underbrace{x}_{\in H} - \underbrace{x_1}_{\in H_1}$

لنبين أن $x_2 \in H_1^{\perp}$ ليتم المطلوب. بما أن x_2 ذو نظيم أصغري فعندئذٍ أي عنصر سيكون نظيمه أكبر من $\|x_2\|$ أي أن :

$$\|x_2\|^2 \le \Bigg\| \underbrace{x_2 - \frac{\langle x_2, z\rangle}{\|z\|^2} z}_{\in M} \Bigg\|^2$$

$$= \|x_2\|^2 + \frac{|\langle x_2, z\rangle|^2}{\|z\|^4}\|z\|^2 - \frac{|\langle x_2, z\rangle|}{\|z\|^2}\langle z, x_2\rangle - \frac{|\langle x_2, z\rangle|}{\|z\|^2}\langle x_2, z\rangle$$

$$\Rightarrow -\frac{|\langle x_2, z\rangle|^2}{\|z\|^2} \ge 0$$

وهذا غير ممكن إلاّ إذا كان $\langle x_2, z\rangle = 0$ أي إذا كان $x_2 \perp z$ وبما أن z اختياري من H_1 فإن $x_2 \perp H_1$ إذاً $x_2 \in H_1^{\perp}$ وبالتالي:

$$x = x_1 + x_2 \quad ; x_1 \in H_1 \ , x_2 \in H_1^{\perp}$$

لنفرض جدلاً وجود تمثيل آخر لـ x هو: $x = x_1' + x_2' \quad ; \quad x_1' \in H_1, x_2' \in H_1^{\perp}$

عندئذٍ يكون : $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$ ولكن:

$$(x_2' - x_2) \in H_1^{\perp} \ , \ (x_1 - x_1') \in H_1$$

وبالتالي:

$$0 = \langle x_2' - x_2, x_1 - x_1'\rangle = \langle x_1 - x_1', x_1 - x_1'\rangle = \langle x_2' - x_2, x_2' - x_2\rangle$$

ومنه فإن :

$$x_2' - x_2 = \theta \Rightarrow x_2' = x_2$$
$$x_1 - x_1' = \theta \Rightarrow x_1 = x_1'$$

أي أن التمثيل وحيد .

نتيجة (١) :

من أجل أي فضاء خطي جزئي مغلق $M \subset H$ يكون $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.

الإثبات :

من ناحية أولى: مهما يكن x من M فإن $x \perp M^{\perp}$ وبالتالي فإن $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$

ومنه $M \subseteq \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

ومن ناحية أخرى : إذا كان x عنصراً من $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ فيمكن كتابته بالشكل :

$$x = x_1 + x_2 \quad ; \; x_1 \in M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp} \; , \; x_2 \in M^{\perp}$$

وبما أن: $x_2 = x - x_1 \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ وكذلك $x_2 \in M^{\perp}$ فيكون:

$$x_2 = \theta \Leftrightarrow \langle x_2, x_2 \rangle = 0$$

إذن $x = x_1 \in M$ أي أن $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq M$ وبالتالي: $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.

ملاحظة (٦) :

من المبرهنة (٦) نجد أن فضاء هيلبرت H يُكتب على شكل مجموع مباشر للفضاءين الخطيين الجزئيين المغلقين فيه $H_1 \, , H_1^{\perp}$ أي : $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$.

بالتدريج يمكن تجزئة الفضاء H إلى مجموع عدد منته من الفضاءات الجزئية المغلقة والمتعامدة $H_1, H_2, \ldots, H_n$ بالشكل $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ حيث $H_i \perp H_j \; ; \; i \neq j$.

وبالتالي كل عنصر $x \in X$ يمكن كتابته بشكل وحيد كما يلي :

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad ; \; x_i \in H_i \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, n$$

(٤-٢) متسلسلة فورييه - النشر في فضاء هيلبرت (Series Fourier) :

لتكن $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ عناصر في فضاء هيلبرت H غير منتهي الأبعاد .

هذه العناصر تشكل جملة متعامدة منظمة في H إذا كان:

$$\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \; i = j \\ 0 & ; \; i \neq j \end{cases}$$

أي أن هذه العناصر متعامدة مثنى ونظيم كل منها مساو 1.

ليكن x عنصراً من فضاء هيلبرت H نسمي الأعداد α_k حيث :

$$\alpha_k := \langle x, h_k \rangle \quad ; \quad k = 1,2,3,\dots\dots\dots$$

عوامل فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة المتعامدة المنظمة $h_1, h_2, \dots\dots, h_n, \dots$.

نسمي المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$ متسلسلة فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة $h_1, h_2, \dots\dots$.

مبرهنة (٧) :

لتكن $h_1, h_2, \dots\dots$ جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت الفصول H ولتكن $\alpha_k := \langle x, h_k \rangle$ عوامل فورييه للعنصر $x \in H$ عندئذ:

١) من أجل أي عنصر $x \in H$ تتحقق المتراجحة :

(متراجحة بيسل)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \le \|x\|^2$$

٢) تكون المتتالية $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي في H، وتتقارب من العنصر x إذا وفقط إذا تحققت المساواة:

(مساواة بارسيفال)
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2$$

الإثبات :

١) من أجل أي عدد طبيعي n لدينا :

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k , x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\rangle$$

$$= \langle x, x \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k , x \right\rangle - \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \langle x, h_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle h_k, x \rangle + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \langle h_k, h_j \rangle$$

وبما أنّ : $\langle h_k, h_j \rangle = \delta_{kj}$ وأنّ : $\langle h_k, x \rangle = \overline{\alpha}_k$ نحصل على :

$$0 \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

أي أن :
$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \le \| x \|^2$$

وباعتبار أنّ الطرف الأيمن لا يتعلّق بـــ n يكون لدينا :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \le \| x \|^2$$

وهي متراجحة بيسل ومن هذه المتراجحة نجد أن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ متقاربة دوماً.

٢) لنضع $s := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$ حيث $n = 1,2,3,.....$ ، عندئذٍ من أجل $n > m$

يكون لدينا:

$$\| s_n - s_m \|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k h_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

أي أن المتتالية $\{s_n\}$ متتالية كوشي في H. والآن لنبرهن على صحة التكافؤ .

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k = x \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \| x \|^2$$

$(\Rightarrow)$: لدينا :

$$\| x \|^2 = \langle x , x \rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\rangle$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

$(\Leftarrow)$: بما أن $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي في فضاء هيلبرت H فيوجد عنصر $y \in H$ بحيث يكون:

$$y = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$$

فيكون لدينا:

$$\|x-y\|^2=\left\|x-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k\right\|^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\alpha|^2\right)=0 \Rightarrow x=y$$

تعريف (٤):

نقول عن الجملة المتعامدة المنظمة $h_1,h_2,.......$ إنها تامّة (مغلقة) في H. إذا كانت مساواة بارسيفال:

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$$

محققة من أجل أي عنصر $x\in H$، حيث هنا $\alpha_k=\langle x,h_k\rangle$ عوامل فورييه.

مبرهنة (٨): دورك لإتمامه للطلبة .

لتكن $h_1,h_2,.......$ جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت H. إن القضايا الآتية متكافئة فيما بينها:

(1) الجملة $h_1,h_2,.......$ تامّة في H . الصفر هو العنصر الوحيد الذي مركباته أصفار.

(2) كل عنصر $x\in H$ يكتب بشكل وحيد كما يلي :

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k \quad ; \quad \alpha_k=\langle x,h_k\rangle$$

(3) إذا كان $\langle x,h_k\rangle=0$ مهما يكن $k=1,2,3......$ فإن $x=\theta$.

(أي العنصر الصفري هو العنصر الوحيد الذي يعامد جميع عناصر الجملة) .

الإثبات :

$(1)\Rightarrow(2)$:

بما أن الجملة $h_1,h_2,.......$ تامّة فإن مساواة بارسيفال محققة وبالتالي فإن المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ ستكون متقاربة من x وبالتالي :

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k$$

وهذا الكتابة وحيدة لأنه إذا وجد ...

$(2) \Leftarrow (3)$:

نفترض أن $\langle x, h_k \rangle = 0$ مهما يكن $k = 1,2,3......$ فيكون :

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k = \lim \theta = 0$$

$(3) \Leftarrow (1)$:

نفرض جدلاً أن الجملة $h_1, h_2, ...$ غير تامّة، عندئذ يوجد عنصر واحد على الأقل y من H لا تتحقق من أجله مساواة بارسيفال ، أي:

$$\| y \|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad ; \quad \alpha_k = \langle y, h_k \rangle$$

وبما أن المتتالية $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي في H (حسب المبرهنة (٧) السابقة) لهذا فإنه يوجد عنصر z من H بحيث :

$$z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$$

لذلك فإن مساواة بارسيفال محققة أي أن :

$$\| z \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad ; \quad \alpha_k = \langle z, h_k \rangle$$

من أجل $k = 1,2,3.......$ يكون :

$$\langle y - z, h_k \rangle = \langle y, h_k \rangle - \langle z, h_k \rangle = \alpha_k - \alpha_k = 0$$

وهذا يعني أن $y - z = \theta$ وبالتالي فإن $y = z$.

من ناحية ثانية لدينا:

$$\| y \|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \| z \|^2$$

أي أن : $\| z \| < \| y \|$ وهذا غير صحيح طالما أنّ : $y = z$

إذن الفرض الجدلي خاطئ والجملة $h_1, h_2, ...$ تامّة في H .